

Alguns fenomens de continuació analítica en una variable complexa

Claudi Meneghin

07/12/2003

Abstract

In this expository paper we examine some phenomena arising when a holomorphic germ is analytically continued.

1 Introducció

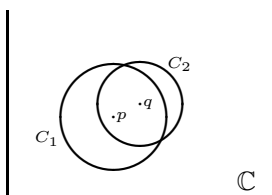
Es consideri un punt p del pla complex i la sèrie de potències en $z - p$:

$$\alpha_0 + \alpha_1(z - p) + \alpha_2(z - p)^2 + \alpha_3(z - p)^3 + \dots$$

Aquesta sèrie convergeix en un cert cercle C_1 de centre p i doncs hi definiem una funció holomorfa f ; escrivem f_p per a posar en evidència el punt de desenvolupament.

Considerem un punt $q \in C_1$ i desenvolupem f en sèrie de potències de $z - q$:

$$f_q(z) = \beta_0 + \beta_1(z - q) + \beta_2(z - q)^2 + \beta_3(z - q)^3 + \dots$$

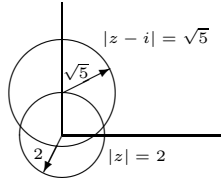


Si és cas que el cercle de convergència C_2 d'aquesta darrera sèrie no sigui contingut en C_1 , hom ha de fet obtingut una coneixença més ampla de f , mitjançant la definició:

$$f(z) := \begin{cases} f_p(z) & \text{si } z \in C_1 \\ f_q(z) & \text{si } z \in C_2 \end{cases}.$$

Aquesta definició és bé posada, perquè $z \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow f_p(z) = f_q(z)$.

Direm que l'extensió de f a $C_1 \cup C_2$ així obtinguda és una *continuació analítica* (o també un *prolongament analític*) de $f_p : C_1 \rightarrow \mathbb{C}$; direm també que $f_q : C_2 \rightarrow \mathbb{C}$ és una continuació analítica de $f_p : C_1 \rightarrow \mathbb{C}$ i viceversa.



Per exemple, es pot senzillament veure que les dues sèries de potències $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ ($|z| < 2$) i $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ $|z-i| < \sqrt{5}$ són cadascuna continuació analítica de l'altra.

Notem que totes dues representen la funció $z \mapsto 1/(2-z)$. Més in general, si és cas que f , definida a priori dins un conjunt obert $U \subset \mathbb{C}$, es pugui restringir a un conjunt obert $V \subset U$ i successivament $f|_V$ pugui ésser prolongada a un conjunt obert $W \not\subset U$, direm que la nova funció obtenida es una 'continuació analítica' de f .

Aquest article té a veure amb alguns fenòmens interessants que apareixen de manera natural en un tal context: il·lustrarem la formació de fronteres naturals per al prolongaments analítics, el fenomen de la resurgència i un fenomen de idiosincrasia amb la noció de revestiment topològic.

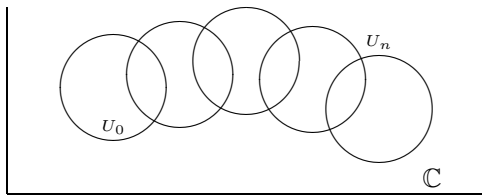
L'escolliment dels arguments és una conseqüència del gust de l'autor.

1.1 Les definicions bàsiques

Un element de funció holomorfa és un parell (U, f) , on U és un conjunt obert a conexió simple del pla complex, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funció holomorfa definida en U , que pren valors en \mathbb{C} . Dos elements (U, f) i (V, g) són **conectables** si existeix una successió finita $\{(U_j, f_j)\}_{j=0, \dots, n}$, tal que $(U_0, f_0) = (U, f)$, $(U_n, f_n) = (V, g)$ i, per a tot $j = 0, \dots, n-1$,

$$\begin{cases} U_j \cap U_{j+1} \neq \emptyset, \\ f_{j+1}|_{U_j \cap U_{j+1}} = f_j|_{U_j \cap U_{j+1}}. \end{cases}$$

Direm que $\{(U_i, f_i)\}_{i=0 \dots n}$ és una **continuació analítica** de (U, f) (o de (V, g)). Direm també, si no hi ha possibilitat de confusió, que cada element



és una continuació analítica de (U, f) (o de (V, g)). Els elements $\{(U_j, f_j)\}_{j=0, \dots, n}$ es diran **enllaçats**.

Una continuació analítica $\{(U_i, f_i)\}_{i=0 \dots n}$ es dirà una **continuació analítica al llarg d'un**

camí $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (que, per a senzillesa, suposem C^1 a trets) si existeix una partició $\{I_i\}_{i=0 \dots n}$ de $[0, 1]$ tal que $\gamma(I_i) \subset U_i$ i $\gamma|_{(I_i)}$ és una aplicació injectiva per a cada $i = 0 \dots n$.

Cal sens dubte recordar que la continuació analítica al llarg d'un camí tancat no conserva pas, en general, els valors de la funció en un entorn del punt de partida: es tingui en compte, per exemple, la determinació φ de la funció 'arrel quadrada complexa', en un entorn de 1, tal que $\varphi(1) = 1$.

Es pot veure φ , en coordenades polars, com a l'aplicació que envia $\varrho \exp(i\vartheta)$ vers $\sqrt{\varrho} \exp(i\vartheta/2)$, on $\sqrt{}$ indica l'operació d'arrel quadrada real positiva. Intuïtivament, continuem φ al llarg de la circumferència unitat: després una volta completa, és a dir un increment de ϑ igual a 2π , obtenim un nou element de funció holomorfa ψ en un entorn de 1, que ha reduït a meitat l'increment de de 2π l'argument de ζ .

Doncs, $\arg(\psi(\zeta)) = \arg(\varphi(\zeta)) + \pi$, és a dir $\varphi = -\psi$. Naturalment, una altra volta de 2π ens porta de bell nou a l'element de partida φ .

1.2 Alguns enunciats clàssics

Per a acabar aquesta introducció, recordem alguns enunciats estandard d'anàlisi complexa i topologia general, que seran utilitzats més enllà.

Teorema 1 (Teorema d'unicitat), [AHL] *Siguin f i g dues funcions meromorfs en un conjunt obert $U \subset \mathbb{C}$: suposem $f = g$ en un conjunt amb un punt d'acumulació $p \in U$: llavors $f \equiv g$ en U .*

Teorema 2 (Teorema de l'aplicació de Riemann) [AHL] *Sigui $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$, un conjunt obert, a connexió simple: llavors U és biholomòrfic a \mathbb{D} .*

Teorema 3 (Teorema- 1/4 de Koebe) [POM] *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ és una mapa conforme, llavors*

$$\frac{1}{4} (1 - |z|^2) |f'(z)| \leq \text{dist}(f(z), \partial f(\mathbb{D})) \leq (1 - |z|^2) |f'(z)|$$

per a tot $z \in \mathbb{D}$.

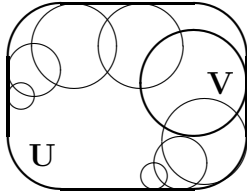
Siguin X i Y uns espais topològics: una aplicació continua surjectiva $p : Y \rightarrow X$ és un **revestiment topològic** si cada punt $x \in X$ té un entorn obert \mathcal{U} tal que la restricció de p a cada component \mathcal{V}_i de $p^{-1}(\mathcal{U})$ és un homeomorfisme de \mathcal{V}_i sobre \mathcal{U} .

També recordem que una aplicació continua $p : Y \rightarrow X$ té la **proprietat de l'elevament de les corbes** si, per a cada corba $\gamma : I \rightarrow X$ i cada $y \in p^{-1}(\gamma(0))$ existeix una corba $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ tal que $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ i $\tilde{\gamma}(0) = y$.

El resultat següent és estandard: (vegeu per exemple [KLA], secció 9.3 i [FOR], teorema 4.19)

Teorema 4 *Un homeomorfisme local surjectiu entre dos espais topològics és un revestiment topològic si i solament si té la propietat de l'elevament de les corbes.*

2 Formació de fronteres naturals



Es consideri un element de funció holomorfa (U, f) : pot succeir que, per a cada restricció (V, g) de (U, f) (és a dir, $V \subset U$ i $g = f|_V$) no existeixi cap continuació analítica (W, h) de (V, g) tal que $W \cap U \not\subset U$. Si és cas, direm que ∂U és una **frontera natural** per a l'element (U, f) .

Considerem per exemple la sèrie de potències $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$: gràcies al teorema de Cauchy-Hadamard ella convergeix dins el disc $|z| < 1$, i doncs hi defineix una funció holomorfa h . De més, $h(z) \rightarrow \infty$ llavors que $z \rightarrow 1$ al llarg de l'eix real. Puix que $h(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + z^{16} + \dots = h(z) - z^2$ hom ha $\lim_{z \rightarrow -1, z \in \mathbb{R}} h(z) = \lim_{z \rightarrow -1, z \in \mathbb{R}} (z^2 + h(z^2)) = \infty$.

De la mateixa manera, $h(z) = z^2 + z^4 + h(z^4)$, doncs $h \rightarrow \infty$ llavors que $z \rightarrow \pm i$ al llarg de l'eix imaginari; de manera general, $h(z) = z^2 + \dots + z^{2^n} + h(z^{2^n})$, per a tot nombre natural n , doncs $h \rightarrow \infty$ llavors que $z \rightarrow \exp(2k\pi i/2^n)$ al llarg d'un radi del disc.

El conjunt dels punts de la forma $\exp(2k\pi i/2^n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$ és dens dins el cercle $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$, doncs h no admet cap continuació analítica a algun punt d'aquesta corba: ella és doncs una frontera natural.

Observem que h pot tampoc ser continuada als punts de \mathbb{T} com a funció meromorfa, perquè, en aquest cas, $1/h$ s'anul·laria en un conjunt amb un punt

d'acumulació i seria doncs idènticament zero (vegeu th.1) (Pel que concerneix aquest exemple, el lector podrà també consultar, per exemple, [CH1] p.129).

3 La resurgència

En A.Hurwitz va plantejar, en el seu quadern, a la data del 6 desembre 1918, la demanda si fou possible que una sèrie de potències

$$h(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi - \xi_0)^k, \quad (1)$$

representant una funció diferent de $\xi \mapsto ce^{\xi}$, admetés continuació analítica al llarg d'un camí tancat γ al voltant de ξ_0 i, a la fi de la continuació, prenguéss la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} ka_k(\xi - \xi_0)^{k-1} = h'(\xi). \quad (2)$$

3.1 La solució de Lewy

En H.Lewy va donar una solució del problema (1)/(2) , que presentem aquí en una forma lleugerament modificada.

Es consideri la funció:

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[-zt - (\log t)^2 / 4\pi i \right] dt;$$

h és holomorfa per $\Re(z) > 0$ i pot ser continuada analíticament als semiplans $\Re(ze^{-i\vartheta}) > 0$ ($\vartheta \in \mathbb{R}^+$), de la manera següent: sigui $N \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \vartheta/N < \pi/2$ i fem $\eta := \vartheta/N$.

Escrivem, per a $z \in \Re(ze^{-i\eta}) > 0 \cup \Re(z) > 0$,

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[ze^{-i\eta} e^{i\eta} t - \frac{\log(e^{-i\eta} e^{i\eta} t)^2}{4\pi i} \right] dt \\ &= \int_{e^{i\eta}\mathbb{R}^+} \exp \left[-ze^{-i\eta} u - \frac{(\log(u) - i\eta)^2}{4\pi i} \right] e^{-i\eta} du \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^R \exp \left[-ze^{-i\eta} u - \frac{(\log(u) - i\eta)^2}{4\pi i} \right] e^{-i\eta} du + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\gamma_R} \exp \left[-ze^{-i\eta} u - \frac{(\log(u) - i\eta)^2}{4\pi i} \right] e^{-i\eta} du \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

La integral en (3), que anomenem I_2 , ha de ser calculada sobre la corba $\gamma_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida posant $\gamma(t) := Re^{it\eta}$.

Hom ha $I_2 \leq C_1 R^\alpha e^{-C_2 R}$ per a unes constants reals positives C_1 , C_2 i α , doncs I_2 tendeix a 0 quan $R \rightarrow \infty$.

Així per a $z \in \{\Re(ze^{-i\eta}) > 0\} \cap \{\Re(z) > 0\}$ hom ha

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[-ze^{-i\eta}u - \frac{(\log(u) - i\eta)^2}{4\pi i} \right] e^{-i\eta} du;$$

però aquesta darrera integral convergeix en $\Re(ze^{-i\eta}) > 0$ i doncs hi defineix una continuació analítica de h . Repetem el procediment N vegades: això ens dona finalment una continuació analítica de h al semiplà $\Re(ze^{-i\vartheta}) > 0$; doncs h pot ser continuada analíticament a tot punt $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Finalment, si fem la continuació analítica al llarg del camí $|z| = 1, 0 \leq \arg(z) \leq 2\pi$, obtenim, designant \hat{h} l'element de funció holomorfa obtingut (en un entorn de $z = 1$) després una volta completa,

$$\begin{aligned} \hat{h}(z) &= \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[-e^{2\pi i} zt - (\log t + 2\pi i)^2 / 4\pi i \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[-zt - \frac{(\log t)^2 - 4\pi^2 + 4\pi i \log t}{4\pi i} \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \exp \left[-zt - e^{2\pi i} t - (\log t)^2 / 4\pi i - \pi i + \log t \right] dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} (-t) \exp \left[-zt - (\log t)^2 / 4\pi i \right] dt \\ &= h'(z). \end{aligned}$$

3.2 El mètode de la integral de Laplace

Es consideri altra vegada el problema de Hurwitz (1)/(2) i es suposi $\xi_0 \neq 0$; el camí γ sigui el cercle $|\xi| = |\xi_0|$ amb l'orientació positiva.

Fem $\xi = \exp(2\pi iz)$ i $h(\exp(2\pi iz)) = G(z)$: això transforma el problema en el següent: existeixen solucions de l'equació

$$G(z+1) = (1/2\pi i) \exp(-2\pi iz) G'(z) \quad (4)$$

que siguin analítiques in una tira horitzontal del pla complex i diferents de $c \exp(\exp(2\pi iz))$?

Aquest darrer problema va ésser analitzat, de manera més general, per A.Naftalevich (vegeu [NAF]) i Berenstein i Seibbar (vegeu [BES]) .

Presentem aquí el mètode de la integral de Laplace, descrit en [BES], sec. 2, que produeix solucions enteres de (4): aqueste mètode consisteix a trobar una condició necessària per a la solució de (4) i a demostrar que ella és també suficient.

Suposem que l'equació (4) tingui solucions enteres de la forma $G(z) = \int_C e^{-2i\pi uz} \varphi(u) du$, per una funció holomorfa φ i un camí d'integració C oportuns.

Hom ha

$$\begin{aligned} G(z+1) &= \int_C e^{-2i\pi u(z+1)} \varphi(u) du \\ &= \int_{C-1} e^{-2i\pi(u+1)(z+1)} \varphi(u+1) du \\ &= \int_{C-1} e^{-2i\pi(u+1)z} e^{-2i\pi u} \varphi(u+1) du \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \int_C e^{-2i\pi(u+1)z} e^{-2i\pi u} \varphi(u+1) du. \quad (6)$$

La deducció de (6) a partir de (5) es justifica per l'hipòtesi que φ sigui entera i C oportú.

Hom ha també

$$\frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi iz} G'(z) = - \int_C u e^{-2i\pi(u+1)z} \varphi(u) du = - \int_C (u-1) e^{-2i\pi uz} \varphi(u-1) du.$$

Així, el problema ha estat reduït a trobar solucions holomorfes (en una tira horitzontal) de l'equació $e^{-2i\pi u} \varphi(u+1) = -u\varphi(u)$: si fem $\varphi(u) = e^{i\pi u^2} \Phi(u)$ això és el mateix que la cerca d'una funció holomorfa Φ tal que $\Phi(u+1) = u\Phi(u)$.

Naturalment, la funció Γ de Euler és una solució, doncs hem arribat a la solució formal de (4):

$$G(z) := \int_C e^{-2i\pi uz + i\pi u^2} \Gamma(u) du. \quad (7)$$

Segui C la recta real $t \mapsto 1 + (1+i)t$: la representació asimptòtica de Stirling:

$$\Gamma(u) = \exp \left[(u-1/2) \text{LOG}(u) - u + \frac{1}{2} \log(2\pi) \right] (1 + O(1/|u|)), \quad |\arg(u)| < \pi,$$

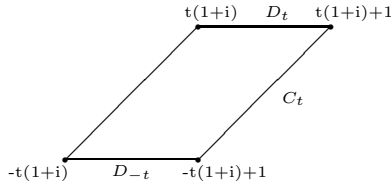
(on LOG és la determinació principal del logaritme) implica que la integral en (7) convergeix, perquè

$$e^{-2i\pi uz + i\pi u^2} \Gamma(u)|_{u=t(1+i)+1} = O \left[e^{-2\pi t^2 + A|t|} \log(B|t|) \right] \quad (8)$$

per a dues constants $A, B \in \mathbb{R}^+$ oportunes quan $|t| \rightarrow \infty$; així G és una funció entera.

Es pot també veure que el camí C escollit és oportú: puix que

$$\begin{aligned} & \int_{C-1} e^{-2i\pi(u+1)z} e^{-2i\pi u} \varphi(u+1) du \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{D_{-t}} + \int_{C_t} + \int_{D_t} \\ &= I_{1t} + I_{2t} + I_{3t}, \end{aligned}$$



on D_{-t} , C_t i D_t són els camins dibuixats en figura, hom ha, per la mateixa raó que (8), $I_{1t} \rightarrow 0$, $I_{3t} \rightarrow 0$ per a $|t| \rightarrow \infty$. Finalment, hem mostrat que (7) és una veritable solució de (4), doncs del problema de Hurwitz.

4 Idiosincrasies

4.1 La continuació maximal

Recordem aquí el resultat ben conegut que cada element (U, f) de funció holomorfa té una continuació analítica regular maximal $Q := (S, \pi, j, F)$, on S és una superfície de Riemann regular sobre un conjunt obert Ω de \mathbb{C} , amb una aplicació de projecció $p : R \rightarrow \Omega$ que és un biholomorfisme local surjectiu, una immersió holomorfa $j : U \rightarrow S$ tal que $\pi \circ j = \text{id}|_U$ i una funció holomorfa $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F \circ j = f$.

Com hem damunt dit, la noció de continuació analítica és, en general, incompatible amb la noció de revestiment topològic, tot a que la construcció de l'aplicació de projecció de la continuació analítica en comparteixi algunes motivacions inicials.

En aquesta secció mostrarem la sobreposició de punts de frontera i de punts interiors de la continuació, analítica i, finalment, la presència de preimatges de discs a components de talla arbitràriament petita.

4.2 Prolungaments regulars que no són uns revestiments

En aquest exemple (vegeu [BEA]) mostrem el comportament de la continuació analítica d'un element de funció holomorfa, construït com a un invers

local d'un producte de Blaschke.

Sigui $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ el disc unitat obert i $\{a_n\} \subset \mathbb{D}$ una successió de punts de \mathbb{D} que s'acumulen a tot punts de $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ i tal que $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|)$ convergeixi.

Amb aquesta hipòtesi, el producte de Blaschke

$$B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} \quad (9)$$

convergeix uniformement en els conjunts compacts de \mathbb{D} i doncs hi defineix una funció analítica que s'anula exactament als punts $\{a_n\}$.

Puix que aquestes zeros s'acumulen a la circumferència unitat \mathbb{T} , B no pot ser continuada analíticament a algun punt $p \in \mathbb{T}$: altrament, gracies al teorema 1 hom hauria $B \equiv 0$.

Així \mathbb{T} és una frontera natural per B .

De més, tot factor del producte (9) són automorfismes del disc unitat, doncs

$$|B(z)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z} \right| \leq 1,$$

és a dir $B(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Gracies al lema de Schwartz-Pick (vegeu per exemple [CH2], p.348, teorema 2), B és una contracció de la mètrica hiperbòlica de \mathbb{D} , doncs

$$0 < \|B'(a_n)\| \leq \frac{1 - \|B'(a_n)\|^2}{1 - |a_n|^2} \leq \frac{1}{1 - |a_n|^2} \leq \frac{1}{1 - |a_n|}. \quad (10)$$

Com, per a tot n , a_n és un zero simple de B , podem construir una determinació f_n de B^{-1} a 0 tal que $f_n(0) = a_n$. De més, els $\{f_n\}$ són elements conectables. Sigui r_n el radi de convergència de f_n en 0: llavors $f_n(\mathbb{D}(0, r_n)) \subset \mathbb{D}$, si no B podria ser continuada analíticament més enllà de \mathbb{D} .

Així, $f_n : \mathbb{D}(0, r_n) \rightarrow f_n(\mathbb{D}(0, r_n))$ és un homeomorfisme i

$$m \neq n \Rightarrow a_m \notin f_n(\mathbb{D}(0, r_n)). \quad (11)$$

Puix que f_n és conforme en $\mathbb{D}(0, r_n)$, podem aplicar el teorema 3, doncs $f_n(\mathbb{D}(0, r_n)) \subset \mathbb{D}(a_n, r_n |f'_n(0)|/4)$.

Gracies a la regla de la cadena, $|f'_n(0)B'(a_n)| \equiv 1$. Construim els $\{a_n\}$ de manera que $|a_{2n} - a_{2n+1}| \leq (1 - |a_{2n}|)^2$: considerant també (10) i (11), hom ha, per a tot n ,

$$4|a_{2n} - a_{2n+1}| \geq r_{2n}|f'_{2n}(0)| \geq r_{2n}(1 - |a_{2n}|), \quad (12)$$

així

$$r_{2n} \leq \frac{4|a_{2n} - a_{2n+1}|}{(1 - |a_{2n}|)} \leq 4(1 - |a_{2n}|), \quad (13)$$

és a dir $r_{2n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Sigui (S, π, j, F) la continuació analítica maximal d'un f_n qualsevol: llavors l'exemple precedent mostra que π no és un revestiment topològic de $\pi(S)$, perquè, sobre qualsevol entorn del punt $0 \in \mathbb{D}$ jeuen discs a radi arbitràriament petit.

References

- [AHL] Lars V. Ahlfors, '*Complex Analysis*' McGraw-Hill, 1953
- [BEA] A.F. Beardon, '*A remark on analytic continuation*' Proceedings of the AMS, 128, n.5
- [BES] Carlos A. Berenstein i Ahmed Sebbar '*On a functional equation of A. Hurwitz*' Advances in mathematics, 110 (1995)
- [CAS] Antonio Cassa, '*Teoria delle curve algebriche piane e delle superfici di Riemann compatte*' Pitagora, 1983
- [CH1] B. Chabat, '*Introduction à l'analyse complexe*' Tome 1 MIR, 1990
- [CH2] B. Chabat, '*Introduction à l'analyse complexe*' Tome 2 MIR, 1990
- [FOR] Otto Forster *Lectures on Riemann surfaces* Springer Verlag, 1981
- [KLA] Klaus Jänich *Topology* Springer Verlag, 1994
- [MIL] John Milnor, '*Dynamics in one complex variable*' Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999
- [NAF] A. Naftalevich *On a differential-difference equation* The Michigan Mathematical Journal, 22 (1975)
- [NAR] Raghavan Narasimhan, '*Several complex variables*' The university of Chicago Press, Chicago and London, 1971

- [NEV] Rolf Nevanlinna, '*Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*' Chelsea publishing company, Bronx, New York (originally published Paris, 1939)
- [POM] Ch.Pommerenke, '*Boundary behaviour of conformal maps*' Springer Verlag, 1992